**ХХII Республиканская научная конференция молодых исследователей «Шаг в будущее»**

**«Элементарная теория сравнения и ее применение»**

**Симпозиум** 3. Математика и информационные технологии

**Автор Руководитель**

 **Ахадов Асхаб Рафикович Шабанов Зейдуллах Абдуллаевич**

**10 класс учитель математики**

**МБОУ СОШ №3 МБОУ СОШ №3**

**Г. Дербент г. Дербент**

**Аннотация**

 **Данная работа посвящена одному из важнейщему разелу теории чисел – теории сравнения.**

 **Тема очень актуальна . В школьном курсе математики терия сравнения на базовом уровне не изучается, а задачи , решаемые методами этой теории часто встречается на олимпиадах , при подготовке к ЕГЭ и т.д.**

 **Методами исследования стало изучение научной литературы поиск информации по данной теме , изучения данного раздела математики в объеме , достаточном для использования при решении различных задач.**

 **Полученые знания позволили решать достаточно сложные задачи на делимость я, на нахождение натуральных решений уровнений и т.д.**

**Оглавление**

**Введение …………………………………………………………………………………….. 1**

**Оснавная часть**

**Глава 1 Элементарная теория сравнения ………………………………… 1-2**

**Глава 2 Решение задач ………………………………………………………………… 2-8**

**Заключение ……………………………………………………………………………………7-8**

 **Литература ……………………………………………………………………………………..9**

**Введение**

 **Понятие сравнения было введено впервые в математику Карлом Гауссом . Его знаменитая работа по теории чисел «Арифметическая исследования» появилась в 1801 году, когда ему было 24 года. В первых главах этой книги рассказывается о теории сравнений. Однако здесь следует упомянуть , что следы теории сравнений можно обнаружить за несколько столетий до Гаусса . Некоторые из них присутствуют в древних правилах проверки арифметических вычислений. Они составляют существенную часть инструкции по арифметическим операциям эпохи Ренессанса . Некоторые из них используются до сих пор , а из всего того, что нам известен об их происхождении , можно сказать , что их корни лежать в античности. Методы теории сравнений широко применяются в различных областях науки , техники , экономики. Задача моей работы заключается в изучении теории сравнения в объёме ,достаточной для применения ее при решении некоторых задач.**

**Основная часть**

**§1 Элементарная теория сравнения .**

**Если два целых числа а и в при делении на натуральное число m дают один и тот же остаток r , где 0**$\leq $**r**$<$**m , то числа а и в называются сравнимыми по модулю m и записывается : а**$≡$**в (mod m) . Читают так : а сравнимо c b по модулю м . Если а**$≡$**в (mod m) , то отсюда следует , что а=в+mt , и разность а-в делится на m . Верно и обратное утверждение : если а=в+mt или а-в делится на m , то а**$≡$**в (mod m).**

**Перечислим некоторые свойства сравнения .(без доказательства):**

**1) а**$≡$**а (mod m),**

**2) Если а**$≡$**в (mod m), то в**$≡$**а (mod m),**

**3) Если а** $≡$**в (mod m) , в**$≡$**с (mod m ) ,то а**$≡с $**(mod m),**

**4) Два числа , сравнимые с третьим по одному и тому же модулю , сравнимы между собой по тому же модулю .**

**5) Сравнения по одному модулю можно почтенно складывать. а1**$≡$**в1 (mod m) ,а2**$≡$**в2( mod m), ,,, , аn**$≡$**вn (mod m) . Тогда а1+а2+,,,+ а4** $≡$ **в1+в2 +,,,+в4  (mod m) .**

**6) Если все сравнения одинаковы , а1**$=$**а2**$=$**а3**$=$ **,,, а4**$=$ **а**

**в1** $=$**в2=в3,,,**$=$ **в4=в ,то получим**

 **а**$≡$**в ( mod m) ,**

**а**$≡$**в (mod m), всего п раз .**

**Получим сравнение .**

**аn=вn ( mod m ). Это свойство часто применяется при решении задач на сравнения .**

**7) Обе части сравнения можно разделить на их общий делитель ,если этот делитель и модуль взаимно простые числа .**

**8) Обе части сравнения и модуль можно разделить на их общий делитель .**

**§2 Решение задач.**

**Хотя теория сравнения не является сложной теорией, но применение ее при решении задач требует определенных умственных усилий, эрудиции и высокой математической культуры.**

**Задача №1.**

**Найти остаток от деления 520 на 24 .**

 **Решение**

 **Очевидно , что 52=25**$≡$ **1 ( mod 24 ).**

**Возводим обе части этого сравнения в десятую степень 520**$≡$**1 ( mod 24 ).**

**Следовательно ,остаток равен 1.**

**Ответ : 1.**

**Задача №2**

**Доказать ,что при любом натуральном n число 37n+2+16n+1 + 23nделится на 7 .**

 **Решение**

**Поскольку 37=7\*5+2 , 16=7\*2+2 , 23=7\*3+2 , то 37**$≡$**2 (mod 7) , 16**$≡$**2 (mod 7) ,**

**23**$≡$**2 ( mod 7).**

**Возводим обе части этих сравнений в степени (n+2) ,(n+1) , n..**

**37n+2**$≡$**2n+2  (mod 7),**

**16n+1**$≡$**2 n+1  (mod 7),**

**23n**$≡$**2n (mod 7),**

**Складывая эти сравнения , получим 37n+2+16n+1+23n=7\*2n (mod 7) , что означает 37n+2+16n+1 +23n делится на 7 , что и требовалось доказать .**

**Задача №3.**

**Доказать ,что 3105+4105 делится на 181.**

 **Решение.**

**Имеем 35=243=181+62 ,**

**то есть 35**$≡$**62 (mod 181),**

**45=1024=18186-62 , тогда 45**$≡$**-62 (mod 181).**

**Возводим обе части этих сравнений в 21-ю степень**

**3105**$≡$**6221 (mod 181),**

**4105**$≡$**-62 (mod 181 ).**

**Складывая эти сравнения, получим**

**3105+4105 =0 (mod 181).**

**Значит, 3105+4105 делится их 181 ,что и требовалось доказать .**

**Задача №4.**

**Доказать, что 5 5k+1 +45n+2 + 35n делится на 11 , если k , m , n – натуральные числа .**

 **Решение:**

**Так как 55=3125=11\*284+1 , то 55=1 (mod 11),**

**Тогда 55к**$≡$**1 (mod 11).**

**Тогда 55к** $≡$ **1 (mod 11) , умножая обе части сравнения на 5 , получим 5к\*5**$≡$**5 (mod 11) , или 5к+1**$≡$**5 (mod 11) (1).**

**Аналогично рассуждая , получим 45**$≡$**1 (mod11) , 45m=1 (mod 11).**

**Умножим обе части этого сравнения на 16.**

**45m\*42**$≡$**16 (mod 11).**

**45m\*42**$≡$**16 (mod 11) , или**

**45m+2**$≡$**16 (mod 11).**

**Но 16**$≡$**5 (mod 11) . Тогда 45m+2** $≡$**5 (mod 11) (2)**

**И , наконец 35**$≡$**243 = 11\*22+1**

**35**$≡$**1 (mod 11) .**

**35n**$≡$**1 (mod 11) . (3)**

**Сложив сравнения (1) ,(2) и (3) , получим 55n+1 +45m+2 + 35n**$≡$**11 (mod11).**

**или 55к+1 +45m+2 +35n** $≡$**0 (mod 11). Это и означает , что 55к+1 +45m+2 +35n делится на 11 ,**

**что и требовалось доказать.**

**Задача №5**

**Доказать , что 260+730 делится на 13 .**

 **Решение**

**24=16=13+3 . Это означает , что 24**$≡$**3 (mod 13) .**

**72= -3 (mod 13) .**

**Возводим обе части полученных сравнений в 15ю степень .**

**260**$≡$**315 (mod 13) , 730**$≡$**(-3)15 (mod 13) и, наконец, сложив эти сравнения ,получим**

**260+730** $≡$**0(mod 13) . Это сравнение означает , что значение выражение 260+730 ,**

**делится на 13 ,что и требовалось доказать .**

***Задача №6***

***Решите в натуральных числах уравнение 3m+4n=5к(демовариант,ЕГЭ).. Решение***

***Рассмотрим сначала остатки от деления на 3 обеих частей уравнения .***

***3***$≡$***0(mod3) 3m***$≡$***0(mod3),***

***4***$≡$***1(mod3), 4n***$≡1($***mod3),***

***При этом 3m+4n***$≡1$***(mod 3),***

***5***$≡2\left(mod3\right)$ ***или 5***$≡$***(-1) (mod 3) ,***

***Тогда 5к***$≡$***(-1)к(mod3)***

***Равенство 0+1=(-1)к(mod3) возможно , если К=2К1 –чётное число .***

***Рассмотрим остатки при делении на 4 (mod 4).***

***3***$≡$***3 (mod4) или 3***$≡$***(-1) (mod 4),***

***3m***$≡(-1)$***m (mod 4),***

***4***$≡$***0 (mod 4) ,4n***$≡0 $***(mod 4),***

***5***$≡1 ($***mod 4) , 5к***$≡$***1 (mod 4).***

***Равенство (-1)m+0 = 1 (mod 4) Возможно , если m- четное число , m=2m1 .***

***Переписываем уравнение , учитывая m=2m1 , k=2к1***

***32m 1+4n =52к1 или***

***9m1+4n=25k1***

***и, наконец ,рассмотрим остатки при делении на 5 ( mod 5) .***

***9***$≡$ ***(-1) (mod 5). 4***$≡-1$***(mod 5)***

***9m1= (-1)m1 (mod 5) 4n***$≡$***(-1)n (mod 5)***

 ***25***$≡$***0 (mod 5)***

 ***25к 1***$≡0 $***(mod 5)***

***При этом , (-1)m1+(-1)n=0 (mod 5)***

***значит , m1 и n –числа разной частности .***

***Далее переписываем уравнение в виде***

***32m1+22n=52к1  или 52к1- 22n=32m1 . Разлагаем на множители . (52k1 – 2 2n)(52к1+2n)=32m1.***

***Правая часть равенства делится на 3 при любом m1.***

***Если k1 и n одинаковой четности , то выражение 5к1-2n делится на 3 , второе выражение 5к1+2n не делится на 3 . В этом случае равенство невозможно, 5к1+2n***$\geq $***7.***

***Рассмотрим два случая :***

***k1-четно ,n-нечетно .***

***k1=2k2  n=2n1+1 .Тогда уравнение 5к1-2n=1 равносильно***

***52к2-22n1+1 =1 , или 52к2=1+22n1+1.***

***22n1+1+1 при любом n1 делится на 3 , 52к2 не делится на 3 . В этом случае решений нет.***

***Допустим к1=2к2+1 – нечетное число , n=2n1 четное***

***5К1 – 4n1 = 1;52k2+1 -1 = 22n1,***

***52К2+1-1=4 (1+5+52+...+52к2),***

***Тогда 4(1+5+52+…+52К2)=4H1***

***Если К2***$\ne $***0 , то в скобках стоит нечетное число и равенство невозможно . Если k2=0 , то 4\*1=4h1 , и n1=1 . Тогда n=2 , k1 =2\*0+1=1. k=2.***

***Из исходного уравнения получим***

***3m+42=52,***

***3m=9 , m=2.***

***Ответ:m=n=к=2.***

***Задача №7***

***Доказать, что при любом значении n€z+ число 19\*8n+17является составным .***

 ***Решение***

 ***Если n=2к , то 19\*82к+17=18\*8 2k+(63+1)к+(18-1)***$≡$***0(mod 3).***

***Если n=4к+1 , то 19\*84к+1+17=13\*84k+1+6\*84k+1+17= =13\*84к+1+48\*84к+17=13\*84к+1+39\*642к+9\*642к+(13+4)=13\*84к+1+39\*642к***

***+9(65-1)2к+(13+4)***$≡$***0(mod 13) .***

***Если n=4к+3, то 19\*84к+3+17 =15\*84к+3+4\*83\*84к+17=15\*84к+3+4\*512\*642к+17­=15\*84к+3+4(510+2)\*642к+17=15\*84к+3+4\*510\*642к+8\*64 2k +17=15\*84к+3+4\*510\*642к+8\*(65-1)2к+17***$≡$***0(mod 5)***

***Числами вида n=2К ,n=4k+1 ; n=4k+3, k=0,1,2,3 и т.д. исчерпываются все натуральные числа. При к=o ,n=4\*0+1=1***

***n=4\*0+3=3***

***К=1, то n=2\*1=2 , n=4\*1+1=5***

***К=2 ,то n=2\*2=4 .***

***К=3 , то n=2\*3=6 , и т.д***

***Таким образом числа 19\*8n+17 при любом n€z делятся хотя бы на одно из чисел 3 , 13 или 5 , то есть оно составное.***

***Задача №8.***

1. ***Доказать , что 2015-1 делится на 11\*31\*61 .***

 ***Решение .***

***1)25***$≡$ ***- 1(mod 11 ), 10***$≡$***-1 (mod 11) .***

***105***$≡$***-1 (mod 11) .***

***Перемножим эти сравнения :***

***205***$≡1$***(mod 11) .***

***Возводя в куб обе части сравнения , получим 2015***$≡$ ***1 (mod 11) .***

***Это означает , что 2015-1 делится на 11 .***

***2)Имеем 20***$≡$***-11 (mod 31) (а)***

***202***$≡121$***(mod 31) .***

***Но 121=-3 (mod 31) , тогда 202***$≡$ ***-3 (mod 31) (б)***

***Умножая сравнения a) и б)***

***203***$≡$***33 (mod 31)***

***Или 203***$≡$***2 (mod 31) .***

***2015***$≡$***25( mod 31) , но 32***$≡$***1 (mod 31) ,***

***Тогда 2015***$≡$***1 (mod 31) ,***

***2015-1***$≡0 \left(mod 31\right).$

***Это означает , что 2015-15 делится на 31 .***

***3) 34=81***$≡$***20 (mod 61) или***

 ***20***$≡3$***4 ( mod 61) ,***

***205***$≡$***320 (mod 61 ) ,***

***но 35***$≡$***-1 (mod 61) , 320***$≡$***1 (mod 61) .***

***Следовательно , 205***$≡1$ ***(mod 61) .***

***Возведя в куб обе части сравнения , получим 2015***$≡$***1 (mod 61) ,***

 ***то есть 2015-1 делится на 61 .***

***Таким образом ,2015-1 делится на 11 , 31 и 61 , потому на их произведение***

***11 \*31\*61 , что и требовалось доказать .***

***С помощью теорем сравнения можно решать и много других разнообразных задач на делимость.***

***Заключение***

***Методы теории сравнений используются в теории чисел, теории групп, криптографии, информатике, химии и других областях.***

***Например, сравнения часто применяются для вычисления контрольных сумм, используемых в идентификаторах.***

***Так, для определения ошибок при вводе международного номера банковского счета используются сравнение по модулю 97.***

***В криптографии сравнения можно встретить в системах с открытым ключом, использующих, например, алгоритм RSA или протокол Диффи-Хеллмана.***

***В химии последняя цифра в регистрационном номере CAS является значением контрольной суммы, которая вычисляется путем сложения последней цифры номера, умноженной на 1, второй справа цифры, умноженной на 2, третья умноженной на 3 и так далее до первой слева цифры, завершаясь вычислением остатка от деления на 10.***

***В спортивных соревнованиях, когда количество участников нечетно, соперником команды Х будет команда Уr , если имеет место сравнение***

***Х+Уr Ξ r(mod (N-1)), где N- общее число команд, r- номер тура .***

***С помощью теории сравнения , например можно определить день недели по формуле w Ξ d[***$\frac{1}{5}$***(13m- 1)]+y+[***$\frac{1}{4}$***y] +[***$\frac{1}{4}$***c]-2c(mod 7) где d число месяца, m номер месяца начиная с марта( март первый месяц) с количество столетий ,y номер года столетии. Например 1 января 2000 года была суббота и т.д.***

***Литература***

1. ***Ю.М. Калягин и другие***

***Алгебра и начала математического анализа , 10 класс.***

***Учебник для общеобразовательных учреждений. Москва***

 ***«Просвещение», 2011г..***

***2 .И.Х. Сивашинский .***

***Теоремы и задачи по алгебре и элементарным функциям.***

***Москва «наука» 1971г***

1. ***Л.А.Басова , М.А. Шубин ,Л.А. Энштейн.***

***Лекции и задачи по математике***

***Москва «просвещение 1981г.***

***4. Интернет.***